



Caleap, M. (2013). Scattering of antiplane elastic waves by two-dimensional periodic arrays of cracks. *arXiv*.  
<http://arxiv.org/abs/1302.1350>

[Link to publication record in Explore Bristol Research](#)  
PDF-document

## University of Bristol - Explore Bristol Research

### General rights

This document is made available in accordance with publisher policies. Please cite only the published version using the reference above. Full terms of use are available:  
<http://www.bristol.ac.uk/red/research-policy/pure/user-guides/ebr-terms/>

# Diffusion d'ondes élastiques antiplanes par des réseaux périodiques bidimensionnels de fissures

## Scattering of antiplane elastic waves by two-dimensional periodic arrays of cracks

Mihai Caleap

Department of Mechanical Engineering, University of Bristol,  
Queen's Building, University Walk, Bristol BS8 1TR, UK

7 février 2013

**Résumé.** Dans le contexte de la propagation d'ondes élastiques dans des milieux endommagés, une approche analytique pour la diffusion d'ondes antiplanes par des réseaux périodiques bidimensionnels de fissures est développée. Avant d'envisager l'étude de réseaux de fissures, la diffusion simple d'une onde élastique antiplane par une fissure plate est préalablement étudiée. Ensuite, en employant la formule de représentation d'une fissure plate et la condition de périodicité d'une rangée de fissures situées sur la même droite antiplane, une équation intégrale de frontières est alors obtenue pour le saut de déplacement à travers une fissure dite de référence. Des résultats numériques pour les coefficients de réflexion et de transmission sont présentés en fonction de l'espacement entre fissures, de la fréquence d'excitation et de l'angle d'incidence. Finalement, l'étude de la propagation d'une onde antiplane au travers d'un empilement périodique d'un nombre fini de réseaux linéaires (i.e. un réseau dit bidimensionnel périodique) est axée sur l'analyse des bandes spectrales interdites et permises. Les effets dus à une perturbation de la périodicité ont également été analysés.

**Abstract.** In the context of elastic wave propagation in damaged solids, an analytical approach for scattering of antiplane waves by two-dimensional periodic arrays of cracks is developed. Before considering the study of arrays of cracks, the scattering of an antiplane wave by a flat crack is first studied. Then, using the representation formula for the scattered displacement by a flat and by considering the periodicity condition of the crack-spacing, a boundary integral equation is obtained for the crack face displacement of the reference crack. Numerical results for the reflection and transmission coefficients are presented as functions of the crack-spacing, the frequency of excitation, and the angle of incidence. Finally, the propagation of antiplane waves by two-dimensional periodic arrays of cracks is studied. Despite the use of a finite number of linear arrays, one recognizes the effects of band-pass filtering or band rejection characteristics of the transmission spectra of a periodic medium. Effects due to a disorder in the periodicity are also analysed.

*Mots-clés* : endommagement ; réseau de fissures ; propagation d'ondes élastiques

*Keywords* : damage ; array of cracks ; elastic wave propagation

## Abridged English version

Localized damage in form of distributed coplanar micro-cracks often occurs at the bounding surfaces between two materials of the same or different mechanical properties. Such micro-cracks may be induced by manufacturing, materials processing, or under service conditions. The nucleation, growth and coalescence of that localized damage may give rise to substantial stiffness and strength reductions of the materials. Thus, the detection and characterization of the damage state in an engineering structure is of considerable interests for improving the manufacturing and the material processing, estimating the life-time, and avoiding catastrophic failures of a damaged structure. This research has also considerable interest, on the one hand to ultrasonic quantitative non-destructive evaluation for detecting and characterizing the damaged state of composites, and on the other hand to linear elastic fracture mechanics to assess the initiation and growth of a developed macro-crack under dynamic loading conditions. With this motivation, the present analysis is concerned with elastic antiplane (shear horizontal) wave propagation in isotropic materials containing micro-cracks arranged periodically in two space-directions. Although an antiplane wave has limited applications in ultrasonic non-destructive evaluation, some useful information can be extracted from this simple model.

### *Summary*

A method similar to that proposed by Zhang and Gross [1] is used to formulate the problem of scattering by a periodic array of collinear shear cracks. The geometry of the problem is presented in Fig. 1. By using a representation formula for the scattered displacement and by considering the periodicity condition of the crack-spacing, an integral equation is obtained for the crack face displacement of a reference crack, which is solved numerically by using a Galerkin method. In general, the scattered wave field consists of an infinite number of wave modes, each with its own cut-off frequency. Under the cut-off frequency the wave modes are standing wave modes which decay exponentially with distance to the array. At frequencies higher than the cut-off frequency the wave modes will be propagating. At the cut-off frequency a mode conversion from a standing into a propagating wave mode occurs. Sufficiently far from the array, and at sufficiently low frequencies, only the zeroth (lowest) order mode is dominant, and that mode represents homogeneous plane waves corresponding to reflected and transmitted waves by the cracks. Numerical results for the reflection (transmission) coefficient are presented, as function of the crack-spacing, the wave frequency, and the angle of incidence.

The wave propagation in two-dimensional periodic arrays of flat cracks is studied next. The global array of Fig. 5 is composed of an arbitrary number  $S$  of infinite periodic arrays of collinear cracks, regularly spaced by a distance  $D$  along the axis  $y_3$ . Its thickness is  $h = (S - 1)D$ . We assume that all linear arrays are identical, with  $d$  their common period (along the axis  $y_1$ ) and  $2a$  the crack width. The reflection and transmission coefficients of the linear array  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) are known from the previous investigation. From these coefficients, the global reflection and transmission coefficients of the two-dimensional array are calculated without difficulty by using an iterative algorithm. Other closely related problems, some more complicated as they involve inplane ((longitudinal or shear vertical)) waves, can also be found in the literature; see, e.g. [2] and [3]. The formalism outlined in the text is valid only at low frequencies and only the lowest order modes can propagate in the array. The other modes are evanescent and decrease exponentially with the propagation distance. They can therefore be neglected if the distance  $D$  is large enough, such that an evanescent mode can not disturb significantly a neighbor linear array. Despite the use of a finite number of linear arrays, one recognizes the effects of band-pass filtering or band rejection characteristics of the transmission spectra of a periodic medium. The

band rejections occur in the vicinity of frequencies for which there is coincidence between the spacing of linear arrays and multiples of the half-wavelength.

Finally, for an infinite periodic two-dimensional array of cracks, the effective wave number of antiplane waves propagating in the homogeneous medium equivalent to two-dimensional array is calculated by using the Floquet theory.

The theory developed here can be further generalized to a two-dimensional array of cracks with any type of periodicity, such as a variation of the crack-sizes or a random distribution of linear arrays.

## 1 Introduction

Un endommagement localisé sous forme d'une distribution de microfissures coplanaires se produit souvent au niveau des surfaces de liaison entre deux matériaux aux propriétés mécaniques identiques ou différentes. De telles microfissures peuvent être induites durant la fabrication, par les matériaux traitants, ou bien les conditions d'utilisation. La germination, la croissance et la coalescence des dommages localisés peuvent provoquer des réductions substantielles de rigidité et de résistance des matériaux. Ainsi, la détection et la caractérisation de l'état d'endommagement dans une structure d'ingénierie est particulièrement importante pour améliorer le processus de fabrication, les matériaux traitants, et éviter les ruptures catastrophiques. Cette recherche a aussi un intérêt considérable, d'une part pour l'évaluation ultrasonore non-destructive, dans le but de détecter et caractériser l'état d'endommagement de composites, et d'autre part, pour la mécanique élastique linéaire de la rupture qui permet d'évaluer le déclenchement et la croissance d'une « macro-fissure » pouvant se développer dans des conditions de charges dynamiques. Bien que beaucoup de facteurs puissent surgir *in situ*, les composites unidirectionnels renforcés ainsi que les laminées à plis croisés peuvent être commodément approximés comme des matériaux élastiques à symétrie isotrope ou orthotrope. Une telle approximation est possible lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est beaucoup plus grande que les longueurs caractéristiques des matériaux composites (espacement, diamètre des fibres dans un composite renforcé, épaisseur de différentes couches d'un stratifié).

Ainsi, l'analyse de la section 2 concerne la propagation d'une onde antiplane dans des matériaux isotropes contenant des microfissures disposées périodiquement dans une direction spatiale, et formant un réseau linéaire infini. La section 3 a pour objectif l'étude de la propagation d'ondes antiplanes dans des réseaux périodiques à deux dimensions spatiales. La méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau bidimensionnel, ainsi que l'obtention des courbes de dispersion et d'atténuation correspondantes, reposent sur la décomposition des réseaux bidimensionnels en un nombre fini de réseaux linéaires dont leurs propres coefficients de réflexion et de transmission sont désormais connus.

## 2 Arrangement périodique de fissures colinéaires

Dans cette section, un modèle est présenté afin de calculer les coefficients de réflexion et de transmission par un arrangement périodique de fissures colinéaires dans un solide élastique isotrope, pour le cas d'une onde antiplane. Même si les ondes antiplanes ont des applications limitées dans l'évaluation ultrasonore non-destructive, des informations utiles peuvent être extraites à partir de ce modèle simple. Une méthode similaire à celle proposée par Zhang et Gross [1] est employée pour formuler le problème de diffusion par un réseau de fissures linéaire et infini. Les déplacements diffusés sont exprimés sous forme d'intégrales de Fourier contenant les déplacements au niveau des lèvres des fissures. En employant la formule de représentation d'une

fissure plate et la condition de périodicité d'une rangée de fissures situées sur la même droite antiplane, une équation intégrale de frontières est alors obtenue pour le déplacement des lèvres de la fissure de référence. Généralement, le champ de déplacement diffusé se compose d'un nombre infini de modes d'onde, chacun avec sa propre fréquence de coupure. Au-dessous de leur fréquence de coupure, les modes sont dits ondes stationnaires et décroissent exponentiellement au cours de la propagation. Au-delà de la fréquence de coupure, les modes deviennent des ondes homogènes. À la fréquence de coupure, une conversion du mode stationnaire en un mode homogène se produit. Lorsque situé suffisamment loin de l'interface, et à des fréquences suffisamment basses, le mode d'ordre zéro est dominant, représentant les ondes planes homogènes réfléchies et transmises par les fissures. Des résultats numériques pour les coefficients de réflexion et de transmission sont présentés en fonction de l'espacement entre fissures, de la fréquence d'excitation et de l'angle d'incidence.

## 2.1 Champ diffusé par une fissure

Considérons un solide élastique isotrope, homogène, infini, contenant une fissure de longueur  $2a$ . La fissure est centrée à l'origine du système  $(y_1, y_3)$  et est infiniment longue dans la direction perpendiculaire  $y_2$ . Nous soumettons cette fissure à un champ acoustique antiplan, défini par un champ de déplacement dans la direction  $y_2$ , de la forme :

$$u_2^{\text{inc}}(y_1, y_3) = u_0 e^{ik_T(y_1 \sin \theta_0 + y_3 \cos \theta_0)}, \quad (1)$$

où  $u_0$  et  $\theta_0$  représentent respectivement l'amplitude de l'onde et l'angle d'incidence. D'après la loi de Hooke, la contrainte  $\sigma_{23}^{\text{inc}}$  associée est donnée, dans le plan de la fissure ( $y_3 = 0$ ), par

$$\sigma_{23}^{\text{inc}}(y_1, 0) = iu_0 k_T \mu_0 \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad (2)$$

où  $k_T = \omega/c_T$  est le nombre d'onde,  $c_T$  est la célérité transverse et  $\mu_0$  est le module de rigidité du solide. Puisque il y a une invariance en la translation dans la direction  $y_2$ , le problème de diffusion résultant devient naturellement bidimensionnel.

Quand la fissure interfère avec l'onde incidente, des ondes diffusées sont générées. Ces ondes produisent un déplacement diffusé antiplan  $u_2^{\text{dif}}$ , solution de l'équation de Helmholtz scalaire

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) + k_T^2 u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = 0. \quad (3)$$

Notons que le déplacement diffusé est antisymétrique par rapport au plan  $(y_1, y_2)$ . Nous pouvons donc limiter l'étude au demi-espace  $y_3 > 0$ . En supposant que les lèvres de la fissure sont libres de contraintes, la condition aux limites du problème se traduit par :

$$\sigma_{23}^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = -iu_0 k_T \mu_0 \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad (|y_1| < a). \quad (4)$$

En dehors de la fissure, le champ de déplacement vaut :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = 0, \quad (|y_1| > a). \quad (5)$$

### 2.1.1 Représentation intégrale

Définissons la transformée de Fourier spatiale (par rapport à la variable  $y_1$ ) directe et inverse de  $u_2^{\text{dif}}$  :

$$\tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) e^{i\xi y_1} dy_1, \quad (6a)$$

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) e^{-i\xi y_1} d\xi. \quad (6b)$$

Après avoir appliqué la transformée (6a) à l'Éq. (3) et défini la fonction  $\beta$  telle que :

$$\beta(\xi) = \begin{cases} (\xi^2 - k_T^2)^{1/2}, & \xi^2 \geq k_T^2, \\ -i(k_T^2 - \xi^2)^{1/2}, & \xi^2 < k_T^2, \end{cases} \quad (7)$$

l'équation de Helmholtz (3) devient une équation différentielle ordinaire de variable  $y_3$  :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2^{\text{dif}}}{\partial y_3^2}(\xi, y_3) - \beta^2(\xi) \tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = 0. \quad (8)$$

Une solution bornée dans la région  $y_3 > 0$  et satisfaisant la condition de Sommerfeld [5], s'écrit :

$$\tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = C(\xi) e^{-\beta y_3}, \quad (9)$$

où la fonction  $C$  est donnée par l'Éq. (6a) sous la forme :

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) e^{i\xi y_1} dy_1. \quad (10)$$

Nous pouvons maintenant substituer l'Éq. (10) dans l'Éq. (9) et appliquer la transformée inverse (6b). La solution du problème de diffusion (4)-(5) peut s'écrire sous la forme :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(y_3) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(v, 0^+) e^{i\xi(v-y_1)} e^{-\beta(\xi)|y_3|} d v d\xi. \quad (11)$$

L'équation (11) montre qu'il est possible d'évaluer  $u_2^{\text{dif}}$  quel que soit  $(y_1, y_3) \in \mathbb{R}^2$ , si  $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$  est connu pour  $|v| < a$ . En utilisant l'Éq. (11) dans la condition aux limites (4), nous obtenons l'équation integrale suivante pour  $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$  :

$$\int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(v, 0^+) \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\xi) e^{i\xi(v-y_1)} d\xi d v = k_T \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad (|y_1| < a). \quad (12)$$

Angel [6] a montré que l'intégrale double dans le membre de gauche de l'Éq. (12) se réduit à une intégrale singulière de type Cauchy. L'équation integrale (12) ne peut pas être résolue analytiquement, mais il est possible de la résoudre numériquement en utilisant, par exemple, une formule d'intégration de type Gauss-Tchebychev (voir [7], chapitre 2, pour plus de détails).

### 2.1.2 Champ lointain

Soit  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires définies par  $r^2 = y_1^2 + y_3^2$  et  $\cos \theta = y_3/r$ . En champ lointain, lorsque  $r \gg a$ , le déplacement diffusé (11) peut s'écrire comme le produit d'une fonction radiale, qui dépend de  $k_T r$ , et d'une fonction de l'angle d'observation  $\theta$ , qui dépend *a priori* de l'angle d'incidence  $\theta_0$  et de la fréquence. Nous avons [10] :

$$u_2^{\text{dif}}(r, \theta, \theta_0) = u_0 \sqrt{\frac{2i\pi}{k_T r}} e^{ik_T r} f(\theta, \theta_0), \quad (r \gg a, \quad \theta \in [0, 2\pi]), \quad (13)$$

où l'*amplitude de diffusion en champ lointain*  $f$  est définie par :

$$f(\theta, \theta_0) = k_T \cot \theta \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(v, 0^+) e^{-ik_T v \sin \theta} d v. \quad (14)$$

## 2.2 Champ diffusé par un arrangement périodique de fissures colinéaires

L'objectif de cette section est d'écrire le champ diffusé par un réseau linéaire infini sous la forme d'ondes planes réfléchies et transmises. La géométrie du réseau et les notations utilisées sont présentées sur la Fig. 1.

### 2.2.1 Énoncé du problème

Le réseau est composé d'une disposition périodique de fissures antiplanes colinéaires. Soit  $2a$  la longueur de chaque fissure et  $d$  la distance entre les centres de deux fissures voisines (pas de réseau). Soit  $(\zeta_1, \zeta_3)$  le repère « local » lié à une fissure. Le repère « global »  $(y_1, y_3)$  est relié au repère local  $(\zeta_1, \zeta_3)$  par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} jd \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\zeta_1| \leq a. \quad (15)$$

D'après l'Éq. (11), le champ de déplacement diffusé au point d'observation  $(y_1, y_3)$  est donc donné par :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(y_3) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a u_2^j(\zeta_1, 0^+) e^{i\xi(\zeta_1 + jd - y_1)} e^{-\beta(\xi)|y_3|} d\zeta_1 d\xi, \quad (16)$$

où  $u_2^j(\zeta_1, 0^+)$  est le déplacement diffusé sur la fissure  $j$ .

### 2.2.2 Hypothèse de périodicité

D'une fissure à une autre le déplacement incident est le même mais déphasé de la quantité  $k_T d \sin \theta_0$ . Ce terme vaut 1 quand  $\theta_0 = 0$ , c'est-à-dire en incidence normale, quand toutes les fissures sont excitées en même temps. En substituant (15) dans (2), le champ de contrainte incident sur les lèvres des fissures peut s'écrire comme :

$$\sigma_{23}^{\text{inc}}(y_1, 0) = \widehat{\sigma}_{23}^{\text{inc}}(\zeta_1) e^{ik_T jd \sin \theta_0}, \quad (17)$$

où  $\widehat{\sigma}_{23}^{\text{inc}}(\zeta_1)$  est la *champ de contrainte incident sur la fissure de référence* ( $|\zeta_1| \leq a, \zeta_3 = 0$ )

$$\widehat{\sigma}_{23}^{\text{inc}}(\zeta_1) = iu_0 k_T \mu_0 \cos \theta_0 e^{ik_T \zeta_1 \sin \theta_0}. \quad (18)$$

Par suite, pour respecter l'hypothèse de périodicité dans la direction  $y_1$ , nous pouvons écrire le déplacement  $u_2^j(\zeta_1, 0^+)$  sur la forme [8] :

$$u_2^j(\zeta_1, 0^+) = \widehat{u}_2(\zeta_1) e^{ik_T jd \sin \theta_0}, \quad (19)$$

où  $\widehat{u}_2(\zeta_1)$  ( $|\zeta_1| < a$ ) est la *déplacement diffusé sur la fissure de référence* et  $j = 0, \pm 1, \dots$ . De cette façon, nous pouvons éliminer un grand nombre d'inconnues de l'Éq. (16) en ne conservant que le déplacement diffusé sur la fissure de référence.

En substituant (19) dans (16) nous obtenons :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(y_3) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) e^{i(k_T \sin \theta_0 + \xi)jd} e^{i\xi(\zeta_1 - y_1)} e^{-\beta(\xi)|y_3|} d\zeta_1 d\xi. \quad (20)$$

Rappelons maintenant les propriétés de la fonction de Dirac  $\delta$  :

$$2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta [(k_T \sin \phi + \xi) d - 2j\pi] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij(k_T \sin \phi + \xi)d} ; \quad (21)$$

$$\delta(x) = |d| \delta(dx), \quad \forall x, \quad \forall d = \text{const} \in \mathbb{C} ; \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_0) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(\xi_0), \quad \forall \varphi \in C^1(\mathbb{C}). \quad (23)$$

Nous obtenons alors, compte tenu de l'Éq. (21) :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \text{sgn}(y_3) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) \delta [(k_T \sin \theta_0 + \xi) d - 2j\pi] e^{i\xi(\zeta_1 - y_1)} e^{-\beta(\xi)|y_3|} d\zeta_1 d\xi. \quad (24)$$

Soit, en utilisant l'Éq. (22) :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{1}{d} \text{sgn}(y_3) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \alpha_j) \varphi(\xi) d\xi, \quad (25)$$

avec

$$\varphi(\xi) = \int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) e^{i\xi(\zeta_1 - y_1)} e^{-\beta(\xi)|y_3|} d\zeta_1 \quad (26)$$

et

$$\alpha_j d = 2j\pi - k_T d \sin \theta_0. \quad (27)$$

Enfin, il résulte des Éqs. (25)-(27) après avoir utilisé l'Éq. (23), que le champ de déplacement diffusé par l'ensemble des fissures est de la forme :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{1}{d} \text{sgn}(y_3) \int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) S(\zeta_1 - y_1, y_3) d\zeta_1, \quad (28)$$

avec

$$S(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_j x - \beta_j |y|}, \quad (29)$$

où

$$\beta_j = \beta(\alpha_j). \quad (30)$$

L'équation (28) montre qu'il est possible d'évaluer  $u_2^{\text{dif}}$  en tous points de l'espace, si le champ diffusé  $\widehat{u}_2(\zeta_1)$  est connu pour  $|\zeta_1| < a$ . Par conséquent,  $\widehat{u}_2$  sert de *quantité inconnue fondamentale*.

Le champ de contrainte associé au champ de déplacement (28) s'écrit :

$$\sigma_{23}^{\text{dif}}(y_1, y_3) = \frac{\mu_0}{d} \int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) S'(\zeta_1 - y_1, y_3) d\zeta_1, \quad (31)$$

avec

$$S'(x, y) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j e^{i\alpha_j x - \beta_j |y|}. \quad (32)$$

En faisant s'approcher le point d'observation  $(y_1, y_3)$  des lèvres de la fissure de référence dans l'Éq. (31), et en utilisant la condition aux limites (4), nous obtenons l'équation intégrale suivante pour l'inconnue  $\widehat{u}_2$  :

$$\int_{-a}^a \widehat{u}_2(\zeta_1) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j e^{i\alpha_j(\zeta_1 - y_1)} d\zeta_1 = -iu_0 k_T d \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad |y_1| < a. \quad (33)$$

L'équation intégrale (33) peut être résolue numériquement en adoptant une méthode dite de Galerkin (voir [1] pour plus de détails). La solution  $\widehat{u}_2$  de l'équation intégrale (33) est ainsi déterminée par un calcul exact de diffusion multiple prenant en compte toutes les interactions possibles entre les fissures.

### 2.2.3 Coefficients de réflexion et de transmission du mode fondamental

Dans l'Éq. (28), chaque  $j$  correspond à un mode d'onde. Ceci implique que le champ de déplacement diffusé consiste en un nombre infini de modes, chacun avec sa propre fréquence de coupure. Pour  $\alpha_j^2 > k_T^2$  où :

$$\left| \frac{2j\pi}{d} - k_T \sin \theta_0 \right| > k_T, \quad (34)$$

les modes diffusés de  $u_2^{\text{dif}}$  sont des ondes stationnaires (ou évanescentes) qui décroissent exponentiellement avec l'augmentation de la distance du réseau, tandis que pour  $\alpha_j^2 > k_T^2$ , ces modes représentent des ondes homogènes se propageant dans les directions  $y_3$  positives (ou négatives). Aux fréquences de coupure  $\alpha_j^2 = k_T^2$ , un mode stationnaire se converti dans un mode homogène. On peut montrer que, suffisamment loin du réseau et à des fréquences suffisamment basses, le mode d'ordre zéro ( $j = 0$ ) sera dominant. Ces ondes d'ordre zéro sont les *ondes planes homogènes réfléchies et transmises*, qui se propagent dans la même direction que l'onde incidente. Ceci devient clair en réécrivant le mode d'ordre zéro sous la forme :

$$u_3^{\text{dif}}(y_1, y_3) = R_0 e^{ik_T(y_1 \sin \theta_0 - y_3 \cos \theta_0)}, \quad y_3 < 0, \quad (35)$$

$$u_3^{\text{dif}}(y_1, y_3) = (T_0 - 1) e^{ik_T(y_1 \sin \theta_0 + y_3 \cos \theta_0)}, \quad y_3 > 0, \quad (36)$$

où  $R_0$  et  $T_0$  désignent les coefficients de réflexion et de transmission du *mode fondamental* (d'ordre zéro) qui sont donnés par :

$$R_0 = -\frac{1}{d} \int_{-a}^a \widehat{u}_2(v) e^{-ik_T v \sin \theta_0} dv, \quad T_0 = 1 - R_0, \quad (37)$$

Notons que l'Éq. (37) satisfait le bilan d'énergie bien connu [9] :

$$|R_0|^2 + |T_0|^2 = 1. \quad (38)$$

### 2.3 Résultats numériques et discussion

Le coefficient de réflexion du mode fondamental est tracé ici sur les Figs. 2-4 comme étant une fonction de l'espacement entre fissures  $\tilde{d} = d/a$ , de la fréquence d'excitation  $\tilde{\omega} = k_T a$  et de l'angle d'incidence  $\theta_0$ .

La Fig. 2 montre le module du coefficient de réflexion  $R_0$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $\tilde{\omega}$  pour trois valeurs de  $\tilde{d}$  et pour deux angles d'incidence ( $\theta_0 = 0$  et  $\theta_0 = \pi/4$ ). Le coefficient de réflexion est zéro à  $\tilde{\omega} = 0$  (ondes infiniment longues), et augmente monotonement avec l'augmentation de  $\tilde{\omega}$ , jusqu'à ce qu'un maximum soit atteint et pour lequel les courbes affichent une pente discontinue. Cette discontinuité ainsi que les suivantes qui apparaissent lorsque  $\tilde{\omega}$  augmente, se produisent aux fréquences de coupure  $\tilde{\omega}^{(j)}$ , ce qui résulte des Éqs. (7), (27) et (30),

$$\tilde{\omega}^{(j)} = \frac{2j\pi}{\tilde{d}} - \tilde{\omega}^{(j)} \sin \theta_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Ce sont les valeurs de  $\tilde{\omega}$  auxquelles un mode d'ordre supérieur devient un mode propagatif (homogène). Pour l'incidence normale ( $\theta_0 = 0$ ), l'Éq. (39) se réduit à  $\tilde{\omega}^{(j)} = 2j\pi/\tilde{d}$ . Considérons par exemple la courbe pour  $\tilde{d} = 2$  et  $\theta_0 = 0$ . Dans la gamme de fréquences  $0 \leq \tilde{\omega} < \pi$ , le champ réfléchi à une distance quelconque de  $y_3 = 0$  est uniquement constitué du terme  $j = 0$  dans l'Éq. (29); les termes d'ordres supérieurs peuvent être négligés, car ils sont évanescents. Dans les gammes de fréquences  $\pi < \tilde{\omega} < 2\pi$  et  $2\pi < \tilde{\omega} < 4\pi$ , les termes correspondant au  $j = 1$  et  $j = 2$  doivent, pourtant, aussi être inclus dans le champ total réfléchi en champ lointain. Seul le coefficient de réflexion  $|R_0|$  du mode fondamental est représenté sur la Fig. 2. Pour une valeur approximative  $\tilde{d} \simeq 2$  (fissures étroitement alignées), le coefficient de réflexion approche rapidement  $|R_0| = 1$  (réflexion totale) lorsque  $\tilde{\omega}$  augmente. Les courbes de la Fig. 2b ( $\theta_0 = \pi/4$ ) ont la même apparence générale que celles de la Fig. 2a ( $\theta_0 = 0$ ). Notons pourtant que, pour les mêmes valeurs de  $\tilde{d}$  et  $\tilde{\omega}$ , les coefficients de réflexion semblent être plus petits pour  $\theta_0 = \pi/4$  que pour  $\theta_0 = 0$ , du moins, dans la gamme de fréquences  $0 \leq \tilde{\omega} \leq \pi/2$ .

Pour  $\tilde{d} = 20$ , l'espacement entre fissures est suffisamment grand afin pour que l'on néglige les interactions entre les fissures, et les coefficients de réflexion montrés sur la Fig. 3 approchent ceux d'une fissure seule :

$$|R_0| \simeq \frac{|f(\pi - \theta_0, \theta_0)|}{\pi \tilde{\omega} \cos \theta_0}, \quad (\tilde{d} \gg 1); \quad (40)$$

$f(\theta, \theta_0)$  étant l'amplitude de diffusion en champ lointain de la fissure, Éq. (14). Notons que  $f(\pi - \theta_0, \theta_0) = -f(\theta_0, \theta_0)$ , où  $f(\theta_0, \theta_0)$  représente l'amplitude de diffusion vers l'avant. Ceci nous fournit un contrôle sur l'exactitude de la méthode numérique présentée ici.

Dans la Fig. 4, la variation du coefficient de réflexion en fonction de la distance adimensionnelle  $\tilde{d}$  est montrée pour une incidence normale ( $\theta_0 = 0$ ), et pour plusieurs valeurs de la fréquence adimensionnelle  $\tilde{\omega}$ . Lorsque  $\tilde{d}$  s'approche de 2 (fissures étroitement alignées), nous trouvons que  $|R_0|$  tend vers 1 (réflexion totale). Remarquons que sur la courbe correspondant à  $\tilde{\omega} = 2$ , un pic se distingue lorsque  $\tilde{d} = \pi$ . En effet, au regard de l'Éq. (39),  $\tilde{\omega} = 2$  représente une fréquence de coupure pour une distance  $\tilde{d} = \pi$ .

## 3 Réseau périodique bidimensionnel de fissures

La propagation d'ondes antiplanes dans des réseaux bidimensionnels de fissures est étudiée. Ces réseaux sont formés d'un empilement de réseaux linéaires infinis et périodiques. Dans un premier temps, nous rappelons la méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission

de réseaux bidimensionnels finis et périodiques. Ensuite, pour des réseaux infinis et périodiques, le nombre d'onde des ondes antiplanes se propageant dans le milieu homogène équivalent au réseau bidimensionnel de fissures est calculé à l'aide de la théorie de Floquet.

### 3.1 Coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau fini

Considérons le réseau global de la Fig. 5. Il est composé d'un nombre arbitraire  $S$  de réseaux linéaires infinis, régulièrement espacés d'une distance  $D$  le long de l'axe  $y_3$ . Le réseau global est donc fini et d'épaisseur  $h = (S - 1)D$ . Nous considérons tout d'abord que tous les réseaux plans sont identiques,  $d$  étant la période spatiale commune (selon l'axe  $y_1$ ) et  $2a$  la taille des fissures. Isolons ici un réseau plan  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) du réseau global. Le problème de diffusion d'une onde antiplane par un tel réseau a été étudié dans la section précédente. Les coefficients de réflexion et de transmission du réseau linéaire infini  $s$  sont désormais connus et notés  $R$  et  $T$ , où l'indice 0 associé au mode fondamental a été ici supprimé pour alléger les écritures. À partir de ces coefficients, ceux du réseaux global,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$ , peuvent être calculés en élaborant un schéma itératif relativement simple. La technique employée se fonde sur celle de Huang et Heckl [4]. Ce formalisme est valable uniquement aux basses fréquences et seuls les modes d'ordre zéro peuvent se propager dans le réseau. Les autres modes sont des modes évanescents qui décroissent exponentiellement au fur et à mesure de leur propagation.

Dans la suite, nous mettons en équation les réflexions multiples et les allers-retours entre deux réseaux linéaires consécutifs. Le calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau bidimensionnel s'effectue sans difficulté en utilisant un algorithme itératif présenté par la suite.

#### 3.1.1 Réflexion et transmission par deux réseaux linéaires infinis

Isolons ici deux réseaux linéaires parallèles consécutifs  $r$  et  $s$  du réseau global, le réseau  $r$  étant celui soumis à l'onde incidente.

Le champ total transmis, compte tenu des réflexions multiples entre les réseaux  $r$  et  $s$ , s'écrit à l'aide des séries de Debye, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_2^T &= u_0 T_r T_s + u_0 T_r T_s R_s R_r e^{i\phi} + u_0 T_r T_s (R_s R_r e^{i\phi})^2 + \dots \\ &= u_0 T_r T_s \left( 1 + R_s R_r e^{i\phi} + (R_s R_r e^{i\phi})^2 + \dots \right) \\ &= u_0 T_r T_s (1 - R_s R_r e^{i\phi})^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Le champ total transmis a été exprimé en fonction d'une série géométrique. La convergence de cette série est assurée dès lors que  $|R_s R_r e^{i\phi}| < 1$ . Dans l'Éq. (41), nous avons introduit la notation :

$$\phi = 2k_T D \cos \theta_0. \quad (42)$$

D'une manière similaire, le champ total réfléchi par les deux réseaux linéaires peut être obtenu sous la forme :

$$u_2^R = u_0 + u_0 R_r + u_0 T_r^2 R_s e^{i\phi} (1 - R_s R_r e^{i\phi})^{-1}. \quad (43)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission globaux sont alors définis par :

$$\mathcal{R}_2 \equiv \frac{u_2^R}{u_0} - 1 = R_r + \frac{T_r^2 R_s e^{i\phi}}{1 - R_s R_r e^{i\phi}}, \quad (44)$$

$$\mathcal{T}_2 \equiv \frac{u_2^T}{u_0} = \frac{T_r T_s}{1 - R_s R_r e^{i\phi}}. \quad (45)$$

### 3.1.2 Coefficients de réflexion et de transmission du réseau global

Les formules (44) et (45) peuvent être utilisées pour élaborer une méthode itérative de calcul des coefficients de réflexion et de transmission. Nous décomposons le réseau bidimensionnel dans  $S - 1$  réseaux (ceux-ci forment alors un « sous-réseau » bidimensionnel caractérisé par les coefficients inconnus  $\mathcal{R}_{S-1}$  et  $\mathcal{T}_{S-1}$ ) et dans un autre réseau linéaire (caractérisé par les coefficients locaux  $R$  et  $T$ ). Suite à cette décomposition, les coefficients  $\mathcal{R}_S$  et  $\mathcal{T}_S$ , du réseau global de la Fig. 5, peuvent s'exprimer en fonction de ceux du sous-réseau  $S - 1$ , en remplaçant  $(R_r, T_r)$  et  $(R_s, T_s)$  dans les Éqs. (44)-(45) par  $(R, T)$  et  $(\mathcal{R}_{S-1}, \mathcal{T}_{S-1})$ , respectivement. Ainsi, nous construisons les formules itératives suivantes :

$$\mathcal{R}_S = R + \frac{T^2 \mathcal{R}_{S-1} e^{i\phi}}{1 - R \mathcal{R}_{S-1} e^{i\phi}}, \quad (46)$$

$$\mathcal{T}_S = \frac{T \mathcal{T}_{S-1}}{1 - R \mathcal{R}_{S-1} e^{i\phi}}. \quad (47)$$

Notons que les coefficients de réflexion et de transmission calculés peuvent être validés en utilisant directement la relation de conservation d'énergie (38). Il suffit de remplacer dans cette relation les coefficients du réseau linéaire par ceux du réseau bidimensionnel.

### 3.1.3 Exemples numériques

Les réseaux bidimensionnels considérés dans ce paragraphe possèdent une direction de périodicité selon l'axe  $y_1$ . Pour simplifier l'analyse des résultats, les coefficients de réflexion (transmission) sont ici calculés en incidence normale. Deux exemples numériques sont considérés : i) une répartition périodique selon l'axe  $y_3$  ; ii) une répartition aléatoire de réseaux linéaires selon l'axe  $y_3$ .

**Répartition périodique de réseaux linéaires.** Des résultats numériques sont obtenus dans le cas d'un réseau bidimensionnel composé de  $S = 1, 2, 5$  et  $15$  réseaux linéaires infinis. La Fig. 6 montre l'influence du nombre des réseaux linéaires  $S$  sur le coefficient de transmission en énergie  $|\mathcal{T}|^2$ . Pour  $\tilde{d}(= d/a) = 5$  et  $\tilde{D}(= D/d) = 1$ , la première fréquence de coupure correspond alors à  $k_T D = 2\pi$  (voir l'Éq. (39)). Observons que dans une gamme de basses fréquences, le nombre des minima et des maxima égale le nombre des rangées des réseaux linéaires moins un. La comparaison des courbes pour  $S = 5$  et  $S = 15$  illustre la formation des bandes passantes et bandes d'arrêt (ou interdites). L'existence des bandes passantes et d'arrêt donnent au réseau bidimensionnel les caractéristiques d'un filtre mécanique [11] dans lequel des ondes ayant la fréquence et le nombre d'onde se trouvant dans les bandes d'arrêt sont atténuées, alors que d'autres sont transmises. Même si le nombre des réseaux linéaires est fini, de caractéristiques attendues pour un milieu périodique infini, telles que des bandes passantes et d'arrêt sont reconnues. Ces aspects sont étudiés en détail dans la section suivante.

**Répartition aléatoire de réseaux linéaires.** Considérons ici un réseau bidimensionnel composé de  $S = 30$  réseaux linéaires infinis et disposés périodiquement avec une période  $\tilde{D} = 1$ . Chaque réseau linéaire est caractérisé par  $\tilde{d} = 5$ . L'objectif de ce paragraphe est d'identifier l'effet d'un défaut de position aléatoire de chacun des réseaux linéaires par rapport à leur position

initiale périodique. Seuls les premiers et derniers réseaux linéaires sont supposées fixes. Nous introduisons une distance limite d'approche entre les réseaux, notée  $b$ , dans le but de quantifier ce défaut de périodicité. Ainsi,  $b = D$  correspond à un réseau périodique et, à l'extrême,  $b = 0$  à un réseau apériodique où les fissures de deux réseaux linéaires consécutifs sont susceptibles d'être en contact. Nous nous assurons ici que  $b > 4D$  pour que la contribution d'ondes évanescentes issues d'un réseau linéaire soit négligeable vue des réseaux voisins.

En fixant une valeur de  $b$ , la distribution des réseaux linéaires se résume à calculer le nouvel espacement le long de l'axe  $y_3$ ,

$$D_s = D + (0,5 - \delta_j)(D - b), \quad (s = 2, 3, \dots, S - 1),$$

où  $\delta_j \in [0, 1]$  est une variable aléatoire obéissant une loi de probabilité uniforme. Cette variable est propre à chaque réseau linéaire  $S$ . A titre d'exemple, la Fig. 7 illustre la répartition des réseaux linéaires pour  $b = 0,9D$  et  $b = 0,6D$  et pour une série de tirages aléatoires  $j$  de 1 à 10. Pour une bonne lisibilité de la représentation seulement 11 réseaux sont illustrés. Lorsque  $b = 0,9D$ , le déplacement d'un réseau linéaire autour de sa position initiale est inférieur à  $0,5a$ , tandis que le cas  $b = 0,6D$  correspond à un déplacement des réseaux linéaires inférieur à  $2a$  autour de leur position initiale.

La Fig. 8 présente les coefficients de réflexion en énergie  $|\mathcal{R}|^2$  obtenus pour deux distances limites d'approche :  $b = 0,9D$  et  $b = 0,6D$ . Ces courbes sont comparées avec celle obtenue pour  $b = D$ , c'est-à-dire en situation périodique. Nous avons adopté une échelle logarithmique pour  $|\mathcal{R}|^2$  afin de mieux juger cette comparaison. Le cas  $b = 0,9a$  correspond à un faible désordre par rapport à la situation périodique. Pour ce faible désordre, la présence de bandes passantes et d'arrêt est toujours observable. Lorsque l'on diminue la distance limite d'approche,  $b = 0,6D$ , la situation physique est différente. Même si la périodicité est globalement préservée, la Fig. 8 affiche une diminution des bandes passantes.

### 3.2 Dispersion et atténuation des ondes se propageant dans le réseau infini

Le réseau global de la Fig. 5 est maintenant supposé être constitué d'un nombre infini de réseaux linéaires infinis. Ces derniers sont tous identiques et répartis régulièrement avec une période  $D$  le long de l'axe  $y_3$ . Les fissures de taille  $2a$  ont leur centre localisé aux positions  $y_1 = jd$ ,  $y_3 = \ell D$  ( $j, \ell = 0, \pm 1, \dots$ ). Il est bien connu de la théorie de Floquet (périodicité 1D) ou de Bloch (périodicité 2D et 3D) [12, 13] que les équations différentielles avec des coefficients périodiques admettent des solutions de la forme :

$$u_2(y_3) = w(y_3) e^{i\gamma y_3}, \quad \text{où } w(y_3) = w(y_3 + D). \quad (48)$$

La grandeur  $\gamma$  a le caractère d'un nombre d'onde effectif, caractérisant la propagation des ondes dans la direction  $y_3$ , dans un milieu élastique homogène équivalent au réseau bidimensionnel périodique infini. On dit que  $\gamma$  est le *nombre d'onde de Floquet*. Ce nombre d'onde est à valeurs complexes et peut s'écrire :

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'', \quad (49)$$

où la partie réelle  $\gamma' = \omega/c'$  est la composante suivant  $y_3$  du vecteur d'onde  $\vec{\gamma}$  des ondes se propageant avec la vitesse  $c'$  dans ledit milieu effectif, et la partie imaginaire  $\gamma''$  est leur atténuation.

Il est relativement facile de calculer  $\gamma$ . Achenbach et Li [9] ont présenté une méthode de calcul du nombre d'onde  $\gamma$  (voir aussi [15]). La dérivation formelle de l'équation de dispersion est basée

sur la périodicité du solide dans la direction  $y_3$ . Une équation de dispersion qui relie  $\gamma D$  et  $k_T D$  peut s'écrire sous la forme [9] :

$$2T \cos(\gamma D) = (T^2 - R^2 - 1) e^{ik_T D} + 2 \cos(k_T D), \quad (50)$$

où  $T$  et  $R$  sont les coefficients de réflexion et de transmission du mode fondamental d'un réseau linéaire infini.

L'existence de solutions réelles et complexes du nombre d'onde de Floquet peut être interprétée en termes desdites bandes passantes et d'arrêt en fréquence. Ce sont, respectivement, des parties du spectre où les ondes harmoniques sont propagées ou atténuées, et des caractéristiques des ondes se propageant dans des milieux multicouches [12]. Sur les bandes passantes, le nombre d'onde de Floquet est réel, et les ondes sont propagées essentiellement à travers le solide non-atténuées. Les bandes d'arrêt sont des régions où le spectre est imaginaire pur ou complexe. Ici, en vertu de la solution de Floquet (48), les ondes sont atténuées. Physiquement, l'atténuation est due à la réflexion progressive d'une onde se dirigeant dans le sens positif aux réseaux linéaires successifs du réseau bidimensionnel.

### 3.2.1 Étude numérique

Des courbes de dispersion associées au réseau infini sont comparées avec les résultats obtenus pour un réseau fini. Cette comparaison n'est valable que si le réseau fini contient suffisamment de réseaux linéaires. Avec  $S = 15$ , cette condition est satisfaite. Ceci est justifié par le fait que les coefficients de transmission (ou de réflexion) révèlent les mêmes bandes interdites que les courbes de dispersion (ou d'atténuation) et que celles-ci restent inchangées pour un nombre  $S$  plus important de réseaux linéaires.

Pour  $\tilde{d} = 2,5$  et  $\tilde{D} = 4$  (la première fréquence de coupure correspond alors à  $k_T D = 4\pi$ ), la Fig. 9 compare les courbes de dispersion (et d'atténuation) du réseau de fissures avec le coefficient de transmission en énergie du réseau fini. Les courbes de la Fig. 9a font apparaître une série des bandes d'arrêt pour lesquelles  $\gamma' = 0$  ou  $\gamma' = \pi/D$ . En termes de cristallographie,  $\gamma' = 0$  correspond au centre de la première zone de Brillouin, et  $\gamma' = \pi/D$  à un vecteur d'onde sur la frontière de cette zone. Lorsque  $\gamma' = \pi/D$ , un régime d'ondes stationnaires s'établit. Dans une bande d'arrêt, les ondes se propageant dans le réseau sont atténuées. Inversement, dans les bandes passantes, les ondes sont dispersives et se propagent dans le réseau sans s'atténuer ( $\gamma'' = 0$ ). Notons que les branches imaginaires du spectre d'atténuation doivent tirer leur origine des points sur les branches réelles du spectre de dispersion où la pente est nulle [18]. La première bande d'arrêt est localisée autour d'une fréquence telle que la distance  $D$  coïncide avec une demi-longueur d'onde de l'onde incidente :  $k_T D = \pi$ . Les bandes d'arrêt suivantes sont localisées à des multiples entiers de cette fréquence. La relation ci-avant a été établie par Bragg en cristallographie. Il s'agit de la condition d'interférence constructive entre deux ondes réfléchies par deux réseaux linéaires (ou plans réticulaires) distants de  $D$ . Pour un grand nombre de plans réticulaires, une grande quantité d'ondes interfèrent et donnent naissance aux bandes interdites observées. Les largeurs des bandes d'arrêt sont liées à la densité des fissures dans les réseaux linéaires : plus le rapport  $\tilde{d}$  est petit, plus les bandes d'arrêt s'élargissent et donc plus les bandes passantes sont réduites. Pour des réseaux très denses, les bandes passantes disparaissent complètement car chaque réseau linéaire réfléchit beaucoup plus qu'il ne transmet. Les ondes transmises sont atténuées lors du franchissement de chaque réseau linéaire et sont quasi inexistantes après quelques périodes  $D$  parcourues dans le réseau bidimensionnel.

Dans le même domaine d'étude, la Fig. 9b présente l'évolution du coefficient de transmission en énergie  $|\mathcal{T}|^2$  d'un réseau fini formé de 15 rangées des fissures. À chaque bande d'arrêt observée sur le spectre de dispersion et d'atténuation, Fig. 9a, coïncide ici une transmission nulle. Les

bandes interdites sont effectivement désignées par le coefficient de transmission et des calculs menés pour un plus grand nombre de réseaux linéaires n'ont révélé aucune modification quant à leur forme. Ceci confirme que, pour  $S = 15$ , le réseau global comporte suffisamment de réseaux linéaires pour que la propagation d'ondes puisse être décrite par la théorie de Floquet. Par rapport aux courbes de dispersion et d'atténuation, le tracé du coefficient de transmission fournit un résultat nouveau lié à la dimension finie du réseau dans la direction  $y_3$  : le coefficient de transmission présente, au niveau des bandes passantes, des oscillations aperiodiques de nature interférentielle. Ces oscillations, de type Fabry-Pérot, résultent des interférences entre les ondes réfléchies par les deux interfaces dudit milieu effectif fini. Ces interférences n'ont pas lieu dans les bandes d'arrêt en raison des fortes atténuations qui les caractérisent. Au contraire, les ondes ne sont pas atténuées dans les bandes passantes et peuvent donc se propager à longue distance dans toute l'épaisseur du milieu effectif. Leur forte dispersion explique l'apériodicité des oscillations observées. Si l'on traçait le coefficient de transmission en fonction de  $\gamma'D$ , les oscillations se périodiseraient avec une période inversement proportionnelle à l'épaisseur  $h$  du milieu effectif. Les positions des pics d'interférence sont en effet données par  $\gamma'h = j\pi$ , avec  $j = 0, 1, 2, \dots$

## Conclusion

Le cadre général dans lequel s'inscrivait ce travail était la diffusion multiple des ondes élastiques antiplanes dans les milieux solides élastiques. L'objectif était l'étude de la diffusion multiple par une multitude de fissures antiplanes périodiquement distribuées. Au cours de la première partie de ce travail, l'étude de la diffusion par une fissure antipiane a permis de développer une équation intégrale singulière de type Cauchy. La forme particulière de cette équation intégrale se prête à la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique adaptée à la détermination du saut de déplacement à travers la fissure. En employant la formule de représentation d'une fissure plate et la condition de périodicité d'une rangée de fissures situées sur la même droite antipiane, une équation intégrale de frontières a été obtenue pour le saut de déplacement à travers une fissure dite de référence. Des résultats numériques pour les coefficients de réflexion et de transmission ont été présentés en fonction de l'espacement entre fissures, de la fréquence d'excitation et de l'angle d'incidence. La seconde partie de ce travail avait trait aux réseaux bidimensionnels périodiques, constitués d'un empilement d'un nombre fini de réseaux linéaires infinis de fissures en milieu élastique. La méthode de calcul de la diffusion par un réseau bidimensionnel repose sur la décomposition du réseau bidimensionnel en un nombre fini de réseaux linéaires périodiques et infinis qui forment alors des plans réticulaires. La diffusion par chacun des réseaux linéaires infinis est déterminée par un calcul exact de diffusion multiple. La diffusion plan après plan est calculée ensuite par une méthode itérative ou à l'aide de la théorie de Floquet. Conformément aux théories des milieux périodiques, la présence de bandes interdites et permises dans le spectre des fréquences a été observée. Les effets dus à une perturbation de la périodicité ont également été analysés. Cette perturbation consistait à introduire un défaut aléatoire sur la position de chaque réseau linéaire. L'information principale qui en ressort est que les bandes d'arrêt sont très sensibles à ce type de perturbation, disparaissant assez tôt pour un faible désordre introduit.

La théorie développée ici pourra faire l'objet de développements ultérieurs et être appliquée à un réseau bidimensionnel avec tout type d'apériodicité, telle qu'une variation des tailles des fissures. En outre, en distribuant de façon aléatoire les réseaux linéaires, le calcul exact des champs moyens réfléchis et transmis par le milieu aléatoire (les moyennes étant calculées en réalisant un grand nombre de tirages aléatoires sur les positions des réseaux linéaires) pourra être comparé avec des théories dites de milieu effectif (e.g. [19]). Ces théories probabilistes fournissent les caractéristiques de l'onde plane, dite cohérente, qui se propage dans le milieu homogène équivalent

(vu de l'onde cohérente) au milieu aléatoire.

## Références

- [1] C. Zhang, D. Gross, On wave propagation in elastic solids with cracks, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1998.
- [2] E. Scarpetta, M. A. Sumbatyan, On the oblique wave penetration in elastic solids with a doubly periodic array of cracks, *Q. Appl. Math.*, 58 (2000) 239–250.
- [3] Z. Chuanzeng, C. Xinshuang, L. Zongrong, Interaction of elastic waves with a periodic array of collinear inplane cracks, *Acta Mechanica Sinica*, 8 (1992) 328-335.
- [4] X.Y. Huang, M.A. Heckl, Transmission and dissipation of sound waves in tube bundles, *Acustica*, 78 (1993) 191-200.
- [5] A. Sommerfeld, Die greensche funktionen der schwingungsgleichung, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 21 (1912) 309-353.
- [6] Y. C. Angel, On the reduction of elastodynamic crack problems to singular integral equations, *Int. J. Eng. Sci.*, 26 (1988) 757-764.
- [7] M. Caleap, Diffusion multiple, propagation d'ondes cohérentes : Modélisation de la propagation d'ondes élastiques antiplanes dans des milieux multi-fissurés, Editions Universitaires Européennes, 2010.
- [8] F. Bloch, Über die quantenmechanik der elektronen, *Z. Phys.* 52 (1928) 555-600.
- [9] J.D. Achenbach, Z.L. Li, Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens, *Wave Motion* 8 (1986) 225-234.
- [10] M. Caleap, C. Aristégui, Y.C. Angel, Effect of crack opening and orientation on dispersion and attenuation of antiplane coherent wave, *Geophys. J. Int.* 177 (2009) 1151-1165.
- [11] A.M.B. Braga, G. Herman, Plane waves in anisotropic layered composites in : A.K. Mal, T.C.T. Ting (Eds.), *Wave Propagation in Structural Composites*, ASME, New York, 1988.
- [12] E.I. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, New York, 1956.
- [13] F. Odeh, J.B. Keller, Partial differential equations with periodic coefficients and Bloch waves in crystals, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 1499-1504.
- [14] J.D. Achenbach, Z.L. Li, Propagation of horizontally polarized transverse waves in a solid with a periodic distribution of cracks, *Wave Motion* 8 (1986) 371-379
- [15] Y.C. Angel, J.D. Achenbach, Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks, *Wave Motion* 9 (1987) 377-385.
- [16] M.A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes, *Acustica* 77 (1992) 143-152.
- [17] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures*, Dover Publications, New York, 1953.
- [18] M. Onoe, H.D. McNiven, R.D. Mindlin, Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods, *ASME J. Appl. Mech.* 29 (1962) 729-734.
- [19] C. Aristégui, M. Caleap, O. Poncelet, A.L. Shuvalov, Y.C. Angel, Coherent wave propagation in solids containing spatially varying distribution of finite-size cracks, in *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media*, Springer Proceedings in Physics 128 (2009) 423-435.

## Liste des figures

### List of figures

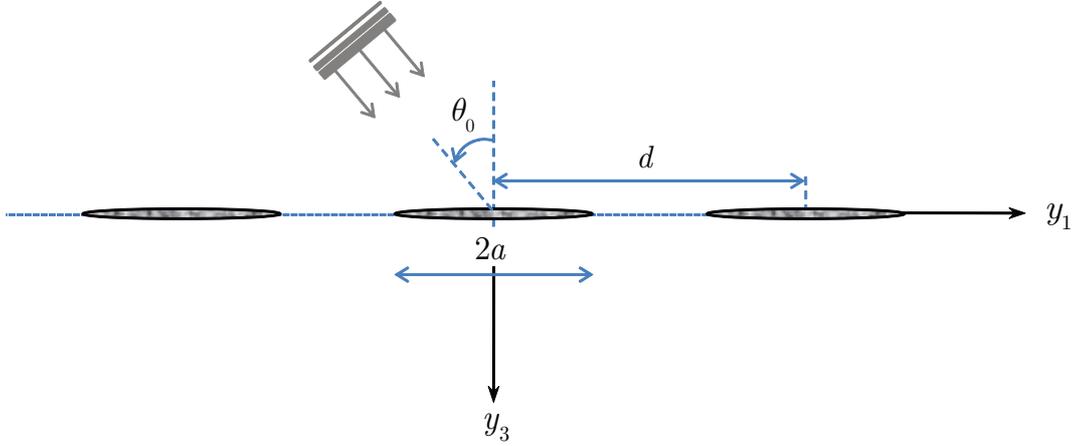


Fig. 1 : Diffusion d'une onde antiplane par un réseau périodique linéaire de fissures.  
 Fig. 1 : Scattering of an antiplane wave by a linear periodic array of cracks.

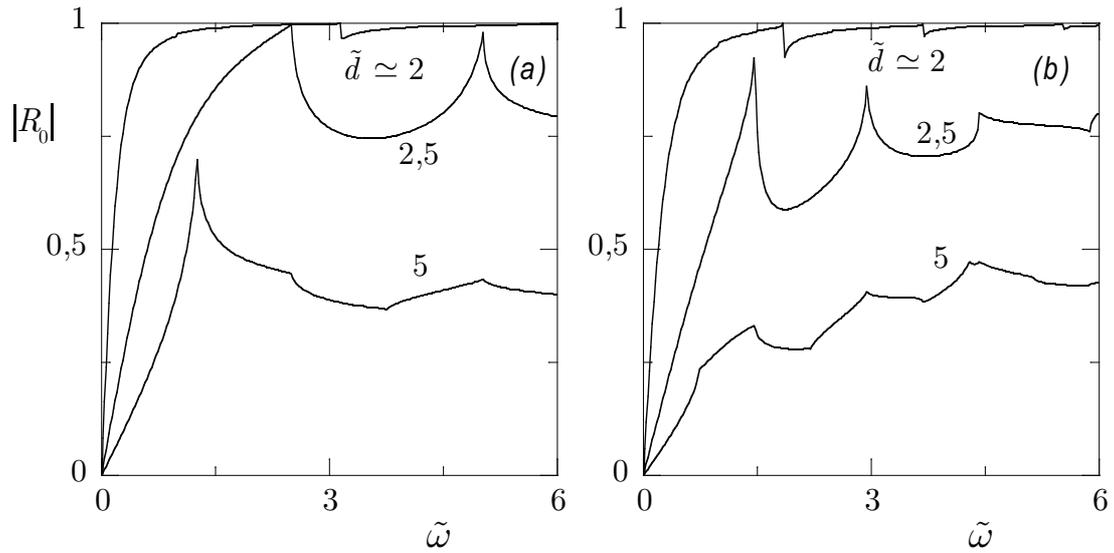


Fig. 2 : Coefficient de réflexion  $|R_0|$  versus la fréquence adimensionnelle  $\tilde{\omega}$ . Effet de la distance  $\tilde{d}$ . a) Incidence normale ( $\theta_0 = 0$ ). b) Incidence oblique ( $\theta_0 = \pi/4$ ).  
 Fig. 2 : Reflection coefficient  $|R_0|$  versus the dimensionless frequency  $\tilde{\omega}$ . Effect of the distance  $\tilde{d}$ . a) Normal incidence ( $\theta_0 = 0$ ). b) Oblique incidence ( $\theta_0 = \pi/4$ ).

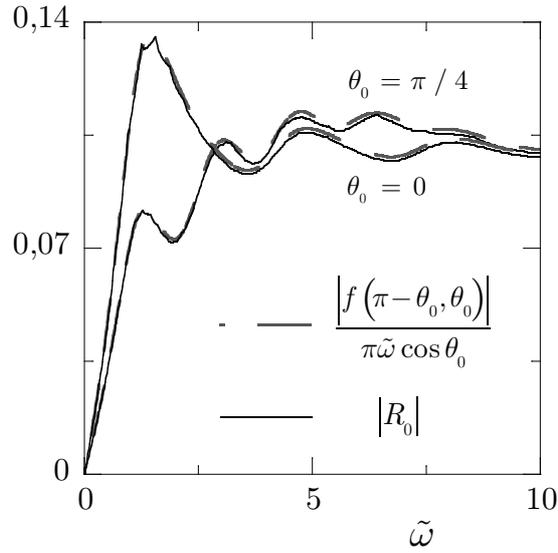


Fig. 3 : Coefficient de réflexion  $|R_0|$  versus la fréquence adimensionnelle  $\tilde{\omega}$  pour une distance  $\tilde{d} = 20$  et pour deux valeurs de l'angle d'incidence. Comparaison avec le coefficient de réflexion d'une fissure seule.

Fig. 3 : Reflection coefficient  $|R_0|$  versus the dimensionless frequency  $\tilde{\omega}$  for a distance  $\tilde{d} = 20$  and for two values of the incidence angle. Comparison with the reflection coefficient of a single crack.

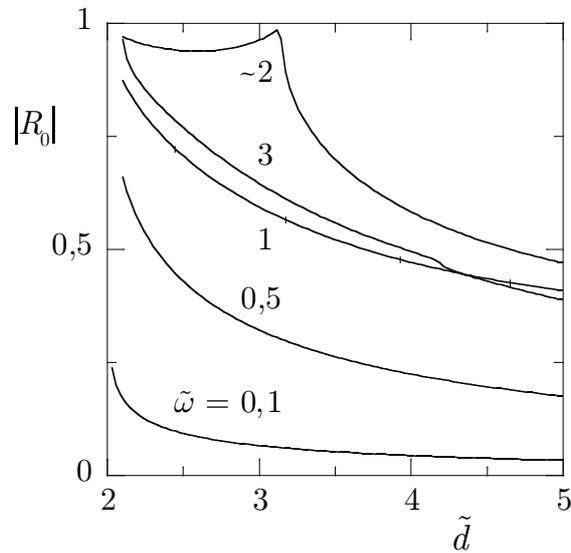


Fig. 4 : Coefficient de réflexion  $|R_0|$  versus la distance  $\tilde{d}$  pour  $\theta_0 = 0$ . Influence de la fréquence adimensionnelle  $\tilde{\omega}$ .

Fig. 4 : Reflection coefficient  $|R_0|$  versus the distance  $\tilde{d}$  for  $\theta_0 = 0$ . Influence of the dimensionless frequency  $\tilde{\omega}$ .

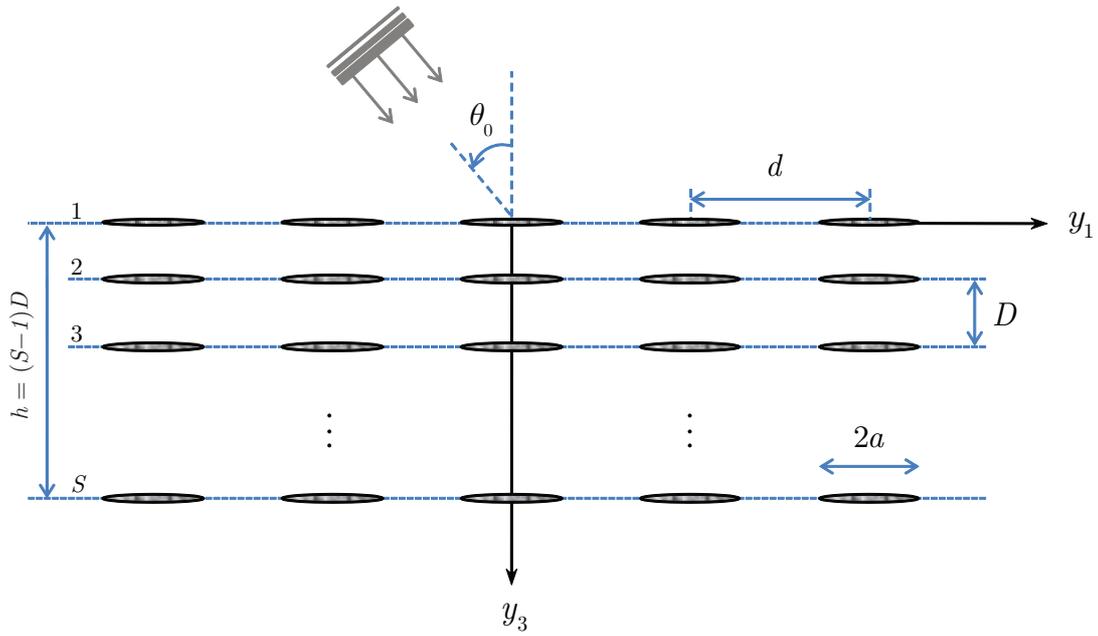


Fig. 5 : Diffusion d'une onde antiplane par un réseau périodique bidimensionnel de fissures.  
 Fig. 5 : Scattering of an antiplane wave by a two-dimensional periodic array of cracks.

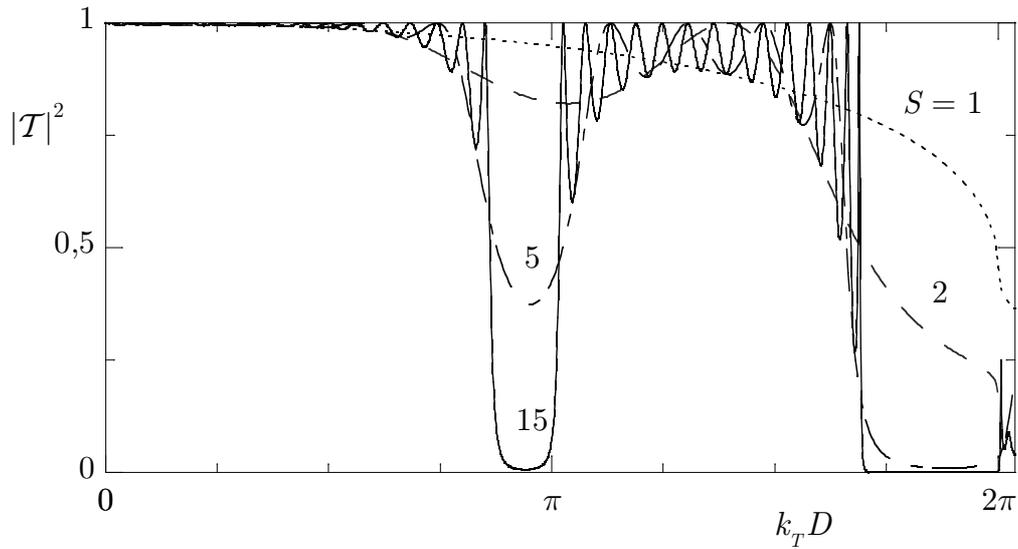


Fig. 6 : Coefficient de transmission en énergie  $|T|^2$  d'un réseau bidimensionnel de fissures excité sous incidence normale avec  $\tilde{d} = 5$  et  $\tilde{D} = 1$ .  
 Fig. 6 : Energy transmission coefficient  $|T|^2$  of a two-dimensional array of cracks excited at normal incidence with  $\tilde{d} = 5$  and  $\tilde{D} = 1$ .

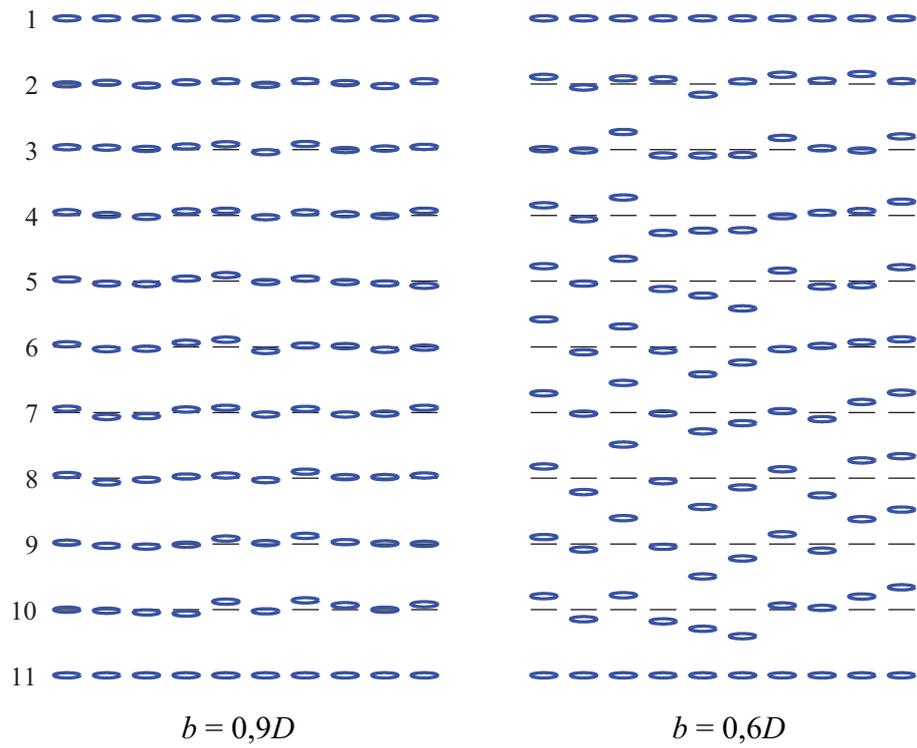


Fig. 7 : Répartition des réseaux linéaires pour deux distances limites d'approche,  $b = 0,9D$  et  $b = 0,6D$ , et pour 10 tirages aléatoires.  
*Fig. 7* : Distribution of linear arrays for two exclusion distances,  $b = 0.9D$  and  $b = 0.6D$ , and for 10 random realisations.

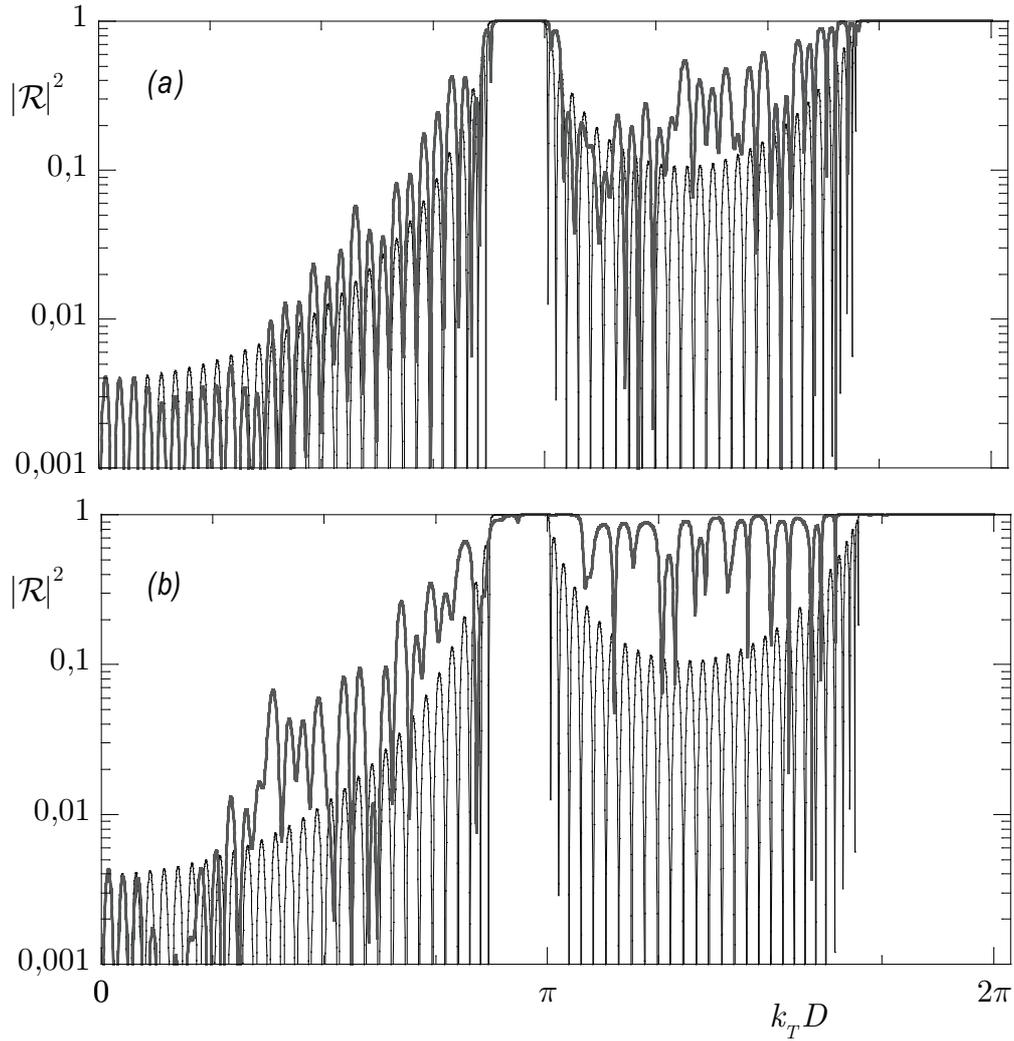


Fig. 8 : Coefficients de réflexion en énergie  $|\mathcal{R}|^2$  d'un réseau bidimensionnel de fissures avec  $\tilde{d} = 5$  et  $\tilde{D} = 1$ , obtenus pour deux distances limites d'approche : a)  $b = 0,9D$  et b)  $b = 0,6D$ . Ces courbes sont comparées avec celle obtenue pour  $b = D$ , c'est-à-dire en situation périodique (trait fin).

*Fig. 8 : Energy reflection coefficients  $|\mathcal{R}|^2$  of a two-dimensional array of cracks with  $\tilde{d} = 5$  and  $\tilde{D} = 1$ , obtained for two exclusion distances : a)  $b = 0.9D$  and b)  $b = 0.6D$ . These curves are compared with the one obtained for  $b = D$ , i.e. in periodic arrangement (fine line).*

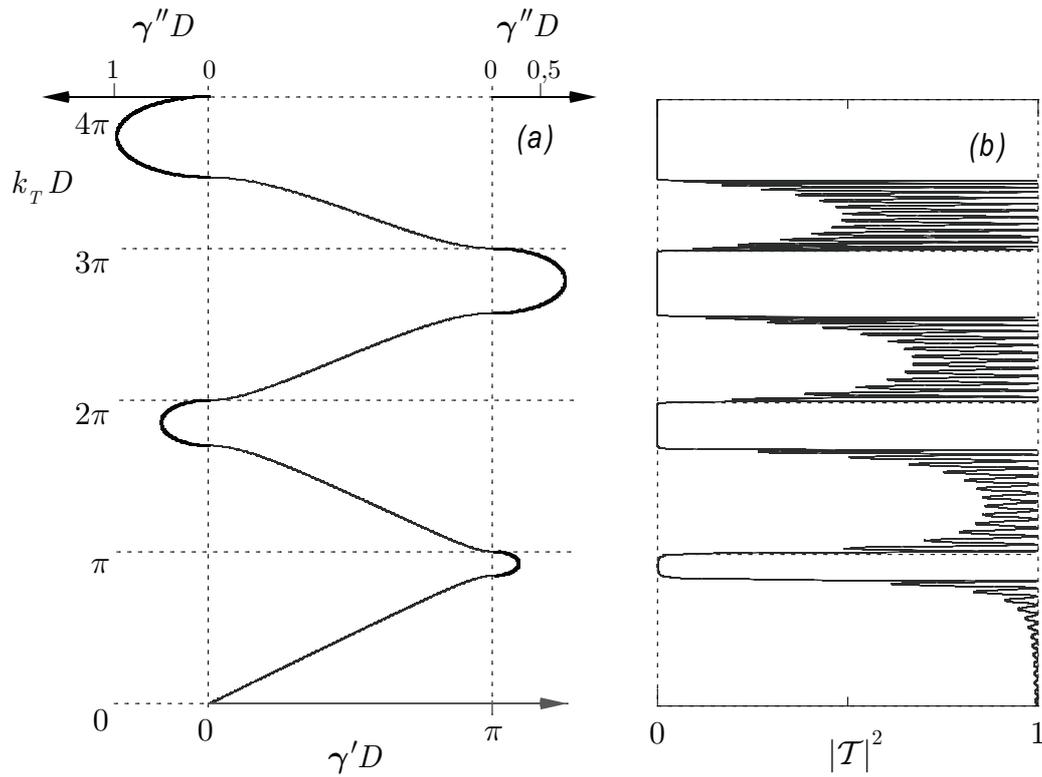


Fig. 9 : a) Courbes de dispersion (trait fin) et d'atténuation (trait gras) d'un réseau bidimensionnel infini de fissures avec  $\tilde{d} = 2,5$  et  $\tilde{D} = 4$ . b) Coefficient de transmission en énergie  $|\mathcal{T}|^2$  d'un réseau bidimensionnel fini de fissures.

*Fig. 9 : a) Dispersion (thin line) and attenuation (solid line) curves of an infinite two-dimensional array of cracks with  $\tilde{d} = 2.5$  and  $\tilde{D} = 4$ . b) Energy transmission coefficient  $|\mathcal{T}|^2$  of a finite two-dimensional array of cracks.*